جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر تمديدات الحقول
لطلاب السنة الرابعة رياضيات (شعبة الجبر)
الفصل الأول(٢٠١٦ - ٢٠١٧)

الاسم:
الدرجة : (١٠٠)
التوقيت : (٩-١٠,٣٠)

أجب عن الأسئلة الآتية

س١- (العلامة: ٣٠) حدد أي التقارير الآتية صحيح وأيها خاطئ ،**مع تصويب الخاطئة** :

١) كل منطقة تكاملية تشكل حقلا .

٢) ان $(Q,+,.)$ حقل أولي .

٣) كل مثالي أولي في حلقة تبديلية واحدية S هو مثالي أعظمي .

٤) العدد π^2 جبري على الحقل $\mathbb{Q}$.

٥) اذا كانت $f(x)$ قابلة للتحليل على الحقل E فانها تملك جذرا فيه .

٦) ان x^2-2 غير خزولة في $Q[x]$.

س٢: (العلامة: ٤٠)

1 – أذكر نص مبرهنة فيرما ثم أثبت أن مهما يكن $n \in Z$ فان $n^{37}-n$ تقبل القسمة على 383838

{ ارشاد : 383838=(37)(19)(13)(7)(3)(2) }

2 – عرف مميز حقل ثم أثبت أنه إذا كان F حقلا منتهيا مميزه p فان الدالة $\varphi: F \to F; \alpha \to \alpha^p$ تماثل داخلي على الحقل F ويكون أيضا $F_{\{\varphi\}} \approx Z_p$.

س٣: (العلامة: ٣٠)

عرف مثالي في حلقة – كثيرة الحدود الخزولة على حقل F ، ثم أثبت أنه اذا كان $A=(p(x))\ ;A \neq \{0\}$ مثاليا للحلقة $F[x]$ ، فان A اعظمي اذا وفقط اذا كانت $P(x)$ غيرخزولة على F.

مع تمنياتي بالنجاح

مدرس المقرر أ. د. محسن شيحة

حمص في ١٣ / ٢ / ٢٠١٧

أجوبة نموذجية لمقرر تمديدات الحقول سنة رابعة رياضيات (جبر) الفصل الأول ٢٠١٦ - ٢٠١٧ رياضيات ٤ (3)

الجواب الأول (١ X) لأن كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً ، (٢ ✓)

(٣ X) لأن كل مثالي أعظمي في حلقة تبديلية وواحدية هو أولي (٤ X) العدد π^2 هو ليس جبرياً بل متسامياً على $\mathbb{Q}$

(٥ X) ليس من الضروري لأن $(x^2+1)^2$ قابلة للتحليل على $\mathbb{R}$ لكن لا يوجد لها جذور في $\mathbb{R}$

(٦ ✓)

الجواب الثاني (١) مبرهنة فيرما : إذا كان $a \in \mathbb{Z}$ ، p عدد أولياً لا يقسم a ، فإن $a^{p-1}-1$ يقبل القسمة على p ، لدينا $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

$n^{37}=(n^{18})^2 \cdot n \equiv n^{18} \cdot n \pmod 2 \equiv n^9 \cdot n \pmod 2 \equiv (n^5)^2 \pmod 2 \equiv (n^2)^2 \cdot n \bmod 2$

$\equiv n^3 \pmod 2 \equiv n^2 \cdot n \pmod 2 \equiv n \bmod 2$

$n^{37}=(n^{12})^3 \cdot n \equiv n^{12} n \pmod 3 \equiv (n^4)^3 n \pmod 3 \equiv n^3 \cdot n^2 \bmod 3 \equiv n^3 \bmod 3 \equiv n \pmod 3$

$n^{37}=(n^5)^7 \cdot n^2 \bmod 7 \equiv n^7 \pmod 7 \equiv n \bmod 7$; $n^{37}=(n^{13})^2 \cdot n^{11} \equiv n^{13} \pmod{13} \equiv n \bmod 13$

$n^{37}=n^{19} \cdot n^{18} \equiv n^{19} \bmod 19 \equiv n \bmod 19$; $n^{37} \equiv n \pmod{37}$ أي أن $n^{37}-n$ يقبل القسمة على 2 ، 3 ، 7 ، 13 ، 37 وبالتالي يقبل القسمة على

$(2)(3)(7)(13)(37)(19)=383838$

(c) مميز الحقل : نسمي أصغر عدد طبيعي n يحقق العلاقة $n \cdot 1 = 0$ مميز للحقل وإذا لم نتمكن إيجاد مثل هذا العدد قيل أن مميز الحقل هو الصفر.

البرهان : إذا كان $a, b \in F$ عندئذ حسب مفكوك ذي الحدين

$(a+b)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} b + \cdots + b^p$ لكن $p \cdot 1 = 0$ لأن p مميز للحقل F

وبالتالي : $(a+b)^p = a^p + b^p$ إذا في F يكون

وكذلك يكون $\varphi(a+b) = (a+b)^p = a^p + b^p = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(a \cdot b) = (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p = \varphi(a) + \varphi(b)$

إذن φ تشاكل . لتكن $\varphi(a)=0$ يقتضي $a^p=0$ إذن $a=0$ وبالتالي ، $\ker \varphi = \{0\}$ إذن φ متباين ، لكن F منتهٍ إذن φ غامر وبالتالي φ تماثل .

وبما أن F منتهٍ ومميزه p فهو يحوي حقل جزئي يماثل الحقل $\mathbb{Z}_p$.

وإذا كانت $c \in \mathbb{Z}_p$ فإن $\varphi(c) = c^p = c$ فالحدودية $x^p - x \in F[x]$ تملك p صفراً في F (العناصر $\mathbb{Z}_p$)

لكن $x^p - x$ تملك على الأكثر p صفراً في F وبالتالي فإن العناصر الثابتة في F تحت تأثير φ هي عناصر $\mathbb{Z}_p$ أي أن $F\{\varphi\} = \mathbb{Z}_p$.

الجواب الثالث

تعريف المثالي: اذا كانت $(S,+,\cdot)$ حلقة، A مجموعة جزئية غير خالية من S فان A تدعى مثالياً يسارياً (يمينياً) للحلقة S اذا حققت الشرطين.

1) A حلقة جزئية من S.

2) مهما يكن $x\in S$ ، $a\in A$ فان $xa\in A$ ($ax\in A$)

اذا كانت A مثالياً يسارياً ويمينياً بآن واحد فانها تدعى مثالي.

تعريف غير المختزلة

يقال عن حدودية $f(x)\in F[x]$ انها غير مختزلة على F ، اذا لم يمكن كتابتها على شكل جداء $g(x)\cdot h(x)$ لحدوديتين $g(x)$ ، $h(x)$ من $F[x]$ من درجتين موجبتين وأقل من درجة $f(x)$.

مبرهنة: اذا كانت $A=(p(x))$ ، $(A\neq\{0\})$ مثالياً أعظمياً اذاً $A=F[x]$ وبالتالي فان $p(x)\notin F[x]$ ، لنفرض جدلاً أن $p(x)$ مختزلة أي $p(x)=f(x)\cdot g(x)$ حيث $f(x)$ ، $g(x)$ من $F[x]$ بما أن A أعظمي فهو أولي. وبما أن $f(x)\cdot g(x)\in A$ فان $f(x)\in A$ أو $g(x)\in A$ وبالتالي اما $f(x)$ أو $g(x)$ عامل من عوامل $p(x)$ وهذا يناقض كون درجتي $f(x)$ و $g(x)$ أصغر من درجة $p(x)$.

2) اذا كانت $p(x)$ غير مختزلة على F ولنفرض انه يوجد مثالي B للحلقة $F[x]$ بحيث أن $A\subseteq B\subseteq F[x]$ ، ان B مثالي رئيسي للحلقة $F[x]$ وبالتالي توجد $g(x)\in B$ حيث أن $B=(g(x))$ ، لكن $A\subseteq B$ تقتضي أن يكون $p(x)\in B$ وبالتالي توجد حدودية $q(x)\in F[x]$ بحيث أن $p(x)=g(x)\cdot q(x)$ لكن $p(x)$ غير مختزلة ، اذاً اما $g(x)$ أو $q(x)$ من الدرجة صفر.

- اذا كانت $g(x)$ من الدرجة صفر فانها تنتمي الى F (ولا تساوي الصفر ولها نظير في F) وبالتالي $B=F[x]$.

- اما اذا كانت $q(x)$ من الدرجة صفر فان $q(x)=const\in F$ وبالتالي $g(x)=c\,p(x)$ تنتمي الى $A=(p(x))$ ومنه $B=A$ ، اذاً لا يوجد مثالي B يحوي A ومنه A أعظمي.

انتهت الأجوبة د. [illegible]